Dynamique de production d'une ressource épuisable : une approche MFG

Olivier Guéant
joint work with Jean-Michel Lasry, Pierre-Louis Lions, Pierre-Noël Giraud

Remerciements au Centre Français de l'Energie et à la Chaire Finance et Développement Durable EDF-Calyon

12 Novembre 2009

Plan

- Modélisation du marché pétrolier sur longue période (100 à 150 ans)
- Ressource épuisable, nombreux producteurs $\Rightarrow$ Modélisation MFG.
- Deux EDP Forward/Backward des MFG avec couplage par les prix. Intérêt pour un critère de maximisation non-orthodoxe.
- Rente de Hotelling. Pic de Hubbert.
- Etude de l'entrée d'une énergie alternative **renouvelable**.

- Production pétrolière : grand nombre d'acteurs $\Rightarrow$ continuum d'agents de taille exogène.
  Disparité des réserves $\Rightarrow$ distribution initiale des réserves.
- Concurrence parfaite $\Rightarrow$ Producteurs preneurs de prix (critique).
- Coûts de production quadratiques uniformes : $C(q) = \alpha q + \frac{\beta}{2} q^2$.
- Demande isoélastique et croissance économique : $D(t,p) = We^{\rho t} p^{-\sigma}$ ou $D(t,p) = We^{\rho t} p^{-\sigma} - \delta$
- Cadre d'optimisation des producteurs :

$$Max \int_0^\infty \left(p(t)q(t) - C(q(t))\right) e^{-rt} dt$$

$$dR(t) = -q(t)dt + \nu R(t) dW(t), \quad \forall t > 0, q(t) \geq 0$$

- $\nu = 0$. Possibilité d'utiliser les outils classiques (solutions de référence) : Lagrangien...

$$\mathcal{L} = \int_0^{\infty} (p(t)q(t) - C(q(t)))e^{-rt}dt + \lambda(R_0)\left(R_0 - \int_0^{\infty} q(t)dt\right)$$

- Les conditions du premier ordre sont (tant que $q(t) \geq 0$) :

$$p(t) = C'(q(t)) + \underbrace{\lambda(R_0)e^{rt}}_{Rente\ de\ Hotelling}$$

- donc...

$$q(t) = \frac{1}{\beta}\left[p(t) - \alpha - \lambda(R_0)e^{rt}\right]_+$$

- et l'on peut en déduire une solution en bouclant sur $\lambda(R_0)$ et $p(t)$... Algorithme d'élucidation. Mais le cadre lagrangien a très peu de flexibilité, pas d'externalités possibles.

- Pic de Hubbert pour les producteurs de taille importante (rôle de la croissance économique : prix versus quantité)
- Solution ($\delta = 0.1$: prix max à $\simeq \$150$)

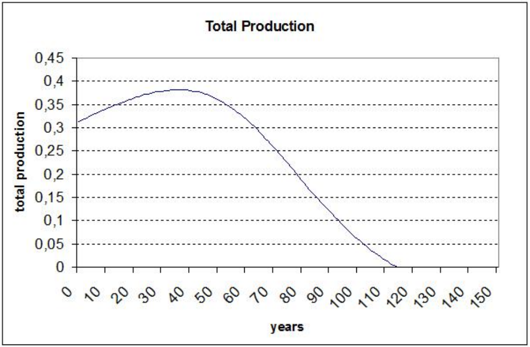


Figure: $r = 5\%, \rho = 2\%, \alpha = 10, \beta = 100, \sigma = 1.2, \nu = 0$

- Evolution des prix :

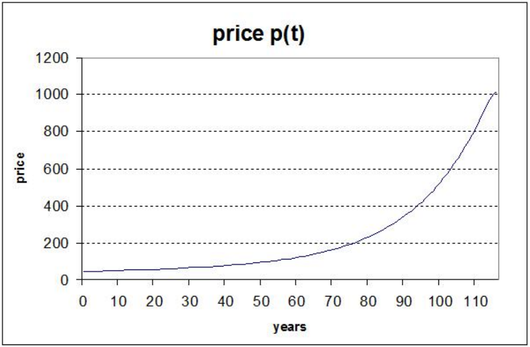


Figure: $r = 5\%, \rho = 2\%, \alpha = 10, \beta = 100, \sigma = 1.2, \nu = 0$

- Problème (pratique) de l'hypothèse de concurrence et problème (théorique) de la définition même d'un équilibre de Nash.

- On introduit une fonction valeur pour chaque producteur $u(t, R)$
- Deux EDP des MFG :

$$(HJB) \quad \partial_t u(t,R) + \frac{\nu^2}{2} R^2 \partial^2_{RR} u(t,R) + \frac{([p(t) - \alpha - \partial_R u(t,R)]_+)^2}{2\beta} = ru(t,R)$$

$$(K) \quad \partial_t m(t,R) + \partial_R \left(-\frac{(p(t) - \alpha - \partial_R u(t,R))_+}{\beta} m(t,R) \right) = \partial^2_{RR} \left[\frac{\nu^2}{2} R^2 m(t,R) \right]$$

- Forward/Backward

- Production:

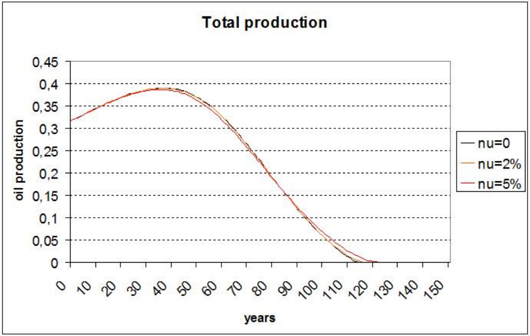
$$q^*(t, R) = \frac{(p(t) - \alpha - \partial_R u(t, R))_+}{\beta}$$

- Offre = Demande ⇒ Le prix est une fonctionnelle de m :

$$p(t) = D(t, \cdot)^{-1} \left(-\frac{d}{dt} \int Rm(t, R) dR \right)$$

- La concurrence parfaite apparaît comme un cas particulier.
- La rente de Hotelling s'interprète comme le gradient de la fonction de Bellman.

- Problème difficile car Forward/Backward et problème du déplacement de m sur la gauche.
- Méthode : contôle optimal (2 étapes) sur une grille + convolution + approximation parabolique + continuation sur δ.
- Solution:



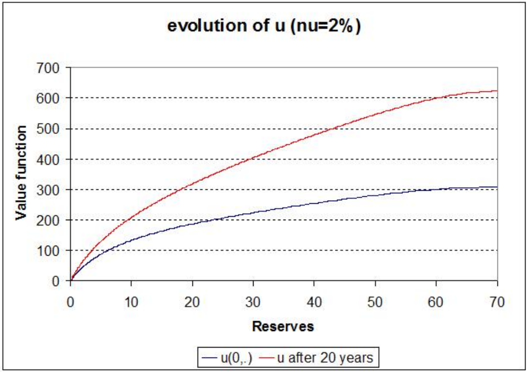


Figure: $r = 5\%, \rho = 2\%, \alpha = 10, \beta = 100, \sigma = 1.2$

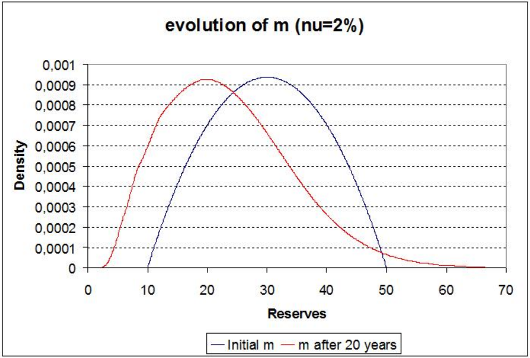


Figure: $r = 5\%, \rho = 2\%, \alpha = 10, \beta = 100, \sigma = 1.2$

- Concurrence ne passant pas par les prix : concurrence pour finir avant les autres
- Pourquoi ? Peur de la fin du pétrole (nationalisation, gestion internationale, ...)
- On ajoute au critère de profit, un critère indiquant la volonté d'avoir une faible réserve relativement aux autres:

$$(HJB_{rank}) \quad \partial_t u(t,R) + \frac{\nu^2}{2} R^2 \partial^2_{RR} u(t,R) - ru(t,R)$$

$$-\epsilon \int_0^R m(t,\phi)d\phi + \frac{1}{2\beta}\left[(p(t) - \alpha - \partial_R u(t,R))_+\right]^2 = 0$$

Effet du terme additionel :

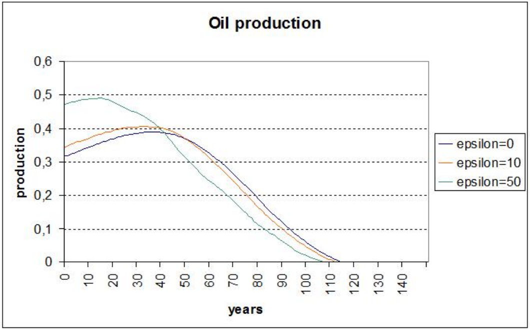


Figure: $r = 5\%, \rho = 2\%, \alpha = 10, \beta = 100, \sigma = 1.2, \nu = 2\%$

- Cadre précédent pour la production pétrolière (1)
- Energie alternative renouvelable (2) : continuum de producteurs et $C_2(q_2) = \alpha_2 q_2 + \frac{\beta_2}{2} q_2^2$.
- Fonctions de demande :

$$D_1(t, p_1, p_2) = We^{\rho t} p_{en}^{-\sigma} \left(\frac{p_1}{p_{en}}\right)^{-\eta}$$

$$D_2(t, p_1, p_2) = We^{\rho t} p_{en}^{-\sigma} \left(\frac{p_2}{p_{en}}\right)^{-\eta}$$

$$p_{en} = \left(p_1^{1-\eta} + p_2^{1-\eta}\right)^{\frac{1}{1-\eta}}$$

Utilité CES. Trois effets clairs + Transfert partiel de la rente de Hotelling.

- Coût fixe pour pénétrer sur le marché : F
- Optimisation :

$$\max_{T, q_2(\cdot)} -Fe^{-rT} + \int_T^{\infty} \left(p_2(t)q(t) - C_2(q(t))\right) e^{-rt} dt$$

- Entrée lorsque l'équilibre post-entrée devient rentable :

$$p_2(T) = \alpha_2 + \sqrt{2\beta_2 rF}$$

- Les pétroliers anticipent l'entrée : deux effets.
  - Effet *"exogène"* : Sur-production pour *liquider* les stocks de pétrole.
  - Effet *"endogène"* : Sous-production pour retarder l'entrée.

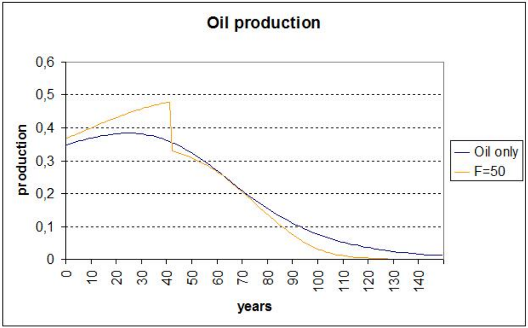


Figure: $\alpha_1 = 10, \beta_1 = 100, \alpha_2 = 50, \beta_2 = 50, \sigma = 1.2, \eta = 3.6, \delta = 0$

Domination de l'effet exogène : la présence potentielle d'un entrant entraîne un surplus de pollution.

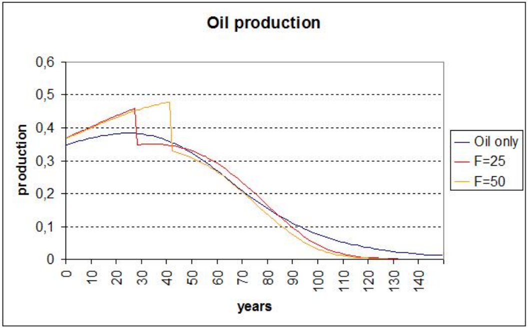


Figure: $\alpha_1 = 10, \beta_1 = 100, \alpha_2 = 50, \beta_2 = 50, \sigma = 1.2, \eta = 3.6, \delta = 0$

Légèrement plus de pollution mais beaucoup moins longtemps...
Enjeu : Subvention publique utile ?

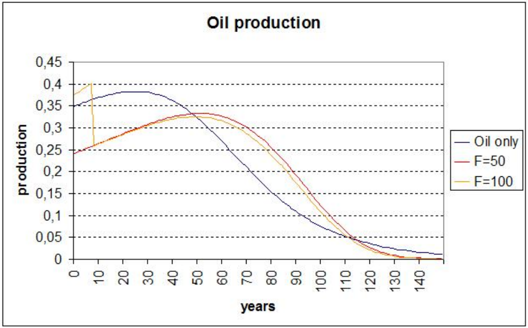


Figure: $\alpha_1 = 10, \beta_1 = 100, \alpha_2 = 10, \beta_2 = 50, \sigma = 1.2, \eta = 3.6$

L'entrée peut être immédiate si la technologie est peu coûteuse. Si l'on est proche d'un tel cas, subventionner l'énergie nouvelle pour supprimer les coûts peut être intéressant.

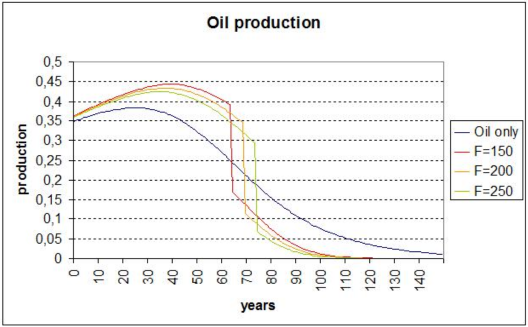


Figure: $\alpha_1 = 10, \beta_1 = 100, \alpha_2 = 50, \beta_2 = 50, \sigma = 1.2, \eta = 3.6$

Si l'on a une contrainte sur la subvention, il semble qu'une dépense ne soit pas nécessairement optimale quand la technologie a d'importants coûts fixes.
Se rationalise avec une fonction de désutilité de la pollution.